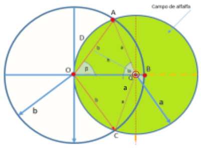
Oveja en campo de alfalfa

Dos amigos tienen un terreno circular de alfalfa (en verde) con centro en "Q" y radio "a". Uno de ellos tiene una oveja amarrada en el punto "O" del perímetro.
¿Cuál deberá ser el radio de la cuerda "b" para que la oveja solo tenga acceso a la mitad de la alfalfa.



Campo de alfalfa
El campo de alfalfa, coloreado verde, centro en "Q", tiene un radio "a".
La oveja está amarrada en el punto "O" y la cuerda de longitud "b", deberá garantizar que acceda solo a la mitad del campo de alfalfa.
El area del círculo de radio "b", si abarca un ángulo $2\cdot\pi$, es

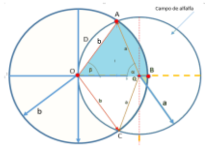
$A = \pi \cdot b^2$

El área del sector circular ABO que abarca un ángulo β (en celeste), es

$$A\_ABO = \frac{\beta}{2}\cdot b^2 \qquad (1)$$

El área del sector circular ABCO es

$$A\_ABCO = \beta\cdot b^2 \qquad (2)$$



El área del sector circular ABO que abarca un ángulo β, es

$$A\_ABO = \frac{\beta}{2}\cdot b^2 \qquad (1)$$

Area de segmento circular ODA (coloreada en rojo)

$A\_ODA = A\_QODA - A_{triang}$

$$A\_QODA = \frac{\alpha}{2}\cdot a^2 \qquad (1)$$

Area del triángulo

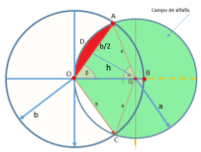
$$A_{triang} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h \qquad (3)$$

$$A\_ODA = \frac{\alpha}{2}\cdot a^2 - \frac{1}{2}\cdot b\cdot h \qquad (4)$$

$$\frac{b}{2} = a\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$b = 2\cdot a\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (5)$$

$$h = a\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (6)$$



Reemplazando en la ecuación

$$A_{triang} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h \qquad (3)$$

las variables "b" y "h" por

$$b = 2\cdot a\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (5)$$

$$h = a\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (6)$$

se tiene

$$A_{triang} = \frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot a\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\left(a\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$A_{triang} = \frac{a^2}{2}\cdot\left(2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

y con $2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin(\alpha)$

$$A_{triang} = \frac{a^2}{2}\cdot\sin(\alpha) \qquad (7)$$

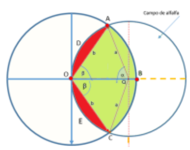
la ecuación (4) deviene

$$A\_ODA = \frac{a^2}{2}\cdot\alpha - \frac{a^2}{2}\cdot\sin(\alpha)$$

$$A\_ODA = \frac{a^2}{2}\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) \qquad (8)$$

Area de segmento circular ODA (coloreada en rojo)

$$A\_ODA = \frac{a^2}{2}\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) \qquad (8)$$



Sector circular de radio "b" y ángulo 2*β
(Área en verde)

El área del sector circular ABCO es

$$A\_ABCO = \beta\cdot b^2 \qquad (2)$$

Para completar la superficie disponible para la oveja, es necesario agregar al area calculada A_ABCO, (en verde) los segmentos circulares ODA y OEC (en rojo)

Segmentos circulares ODA y OEC

Areas de segmentos circulares ODA y OEC (coloreadas en rojo)

$$A\_ODA = \frac{a^2}{2}\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) \qquad (8)$$

$$A\_OEC = \frac{a^2}{2}\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) \qquad (8)$$

Area de los segmento circulares

$A_{segmentos} = A\_ODA + A\_OEC$

$$A_{segmentos} = a^2\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) \qquad (9)$$

Área accesible a la oveja es la suma del sector circular ABCO (en verde) y de los segmentos circulares ODA y OEC (en rojo)

$A_{oveja} = A\_ABCO + A_{segmentos}$

$$A\_ABCO = \beta\cdot b^2 \qquad (2)$$

$$A_{segmentos} = a^2\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) \qquad (9)$$

$$A_{oveja} = \beta\cdot b^2 + a^2\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) \qquad (10)$$

Esta área debe ser igual a la mitad del del área del campo de alfalfa

$A_{alfalfa} = \pi\cdot a^2$ así

$A_{oveja} = \frac{1}{2}\cdot A_{alfalfa}$

$$\beta\cdot b^2 + a^2\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot a^2 \qquad (11)$$

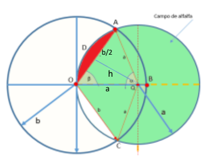
Para la solución se deberá cumplir la ecuación

$$\beta\cdot b^2 + a^2\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot a^2 \qquad (11)$$

$$\beta\cdot b^2 + a^2\cdot(\alpha - \sin(\alpha)) - a^2\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\beta\cdot b^2 + a^2\cdot\left(\alpha - \sin(\alpha) - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (12)$$

Los ángulos α y β deberán ser expresados en función de los radios "a" y "b"



Altura "h" del triángulo

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$h = \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)^{0.5} \qquad (13)$$

Ángulo β

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} \qquad (14)$$

y con

$$h = \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)^{0.5} \qquad (13)$$

$$\sin(\beta) = \frac{1}{a}\cdot\left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)^{0.5} \qquad (15)$$

$$\sin(\beta) = \frac{1}{a}\cdot\left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)^{0.5} \qquad (15)$$

$$\sin(\beta) = \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)^{0.5}$$

$$\sin(\beta) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\frac{b^2}{a^2}\right)^{0.5}$$

$$\sin(\beta) = \left(1 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right)^{0.5}$$

$$\beta = \operatorname{asin}\left[\left(1 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right)^{0.5}\right] \qquad (16)$$

Ángulo α
En el triángulo OQA

$\alpha + 2\cdot\beta = \pi$

$$\alpha = \pi - 2\cdot\beta \qquad (17)$$

En la ecuación

$$\beta\cdot b^2 + a^2\cdot\left(\alpha - \sin(\alpha) - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (12)$$

$$\beta = \operatorname{asin}\left(1 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right)^{0.5} \qquad (16)$$

$$\alpha = \pi - 2\cdot\beta \qquad (17)$$

a : radio del campo de alfalfa
se elige un valor

$$a = 1 \qquad (18)$$

b : longitud de la cuerda
Para el cáculo, inicialmente se asume algún valor que permita evaluar la ecuación (12). El valor de "b" que haga que la evaluación de esta ecuación sea igual a cero, se obtendrá utilizando la función "Goal Seek".

Se debe resolver la ecuación

$$\beta\cdot b^2 + a^2\cdot\left(\alpha - \sin(\alpha) - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (12)$$

con

$$\beta = \operatorname{asin}\left[\left(1 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right)^{0.5}\right] \qquad (16)$$

$$\alpha = \pi - 2\cdot\beta \qquad (17)$$

en la que

$a = 1$ es un dato (18)

y

b = algún valor inicial (19)

y que posteriormente será el valor de la solución buscada, utilizando la función Goal Seek.

a = 1 (18)

b = 1.1587285 (19)

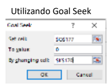
By changing cell

La valorización de la ecuación (12), que es la Set cell, utilizando valor "b" debe tener como resultado, cero
Esto es,
ecuación (12), valorizada = 0
donde "0" es el "To value"
y donde "b" es la: "By changing cell"

La celda en naranja es la "Set cell"
beta * b^2 + a^2 * (alfa - sin(alfa) - pi()/2) = -1.57

Set cell

Utilizando Goal Seek



Para un valor del radio del campo de alfalfa a = 1. la longitud de la cuerda deberá ser b = 1.159